

Simulação Numérica do Problema de N-Corpos Gravitacional

Octavio Augusto Potalej

Instituto de Matemática e Estatística
Universidade de São Paulo

Março, 2026



Esquema

- O problema.
- Questões específicas: colisões e valores iniciais.
- Métodos de integração.
- Aplicações.

Parte I: O Problema

O que é o problema de N-corpos gravitacional?
 Vídeos dos exemplos.

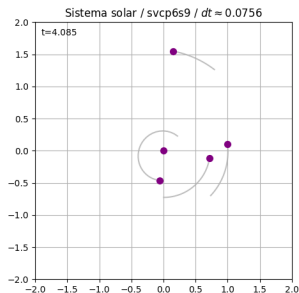


Figura: Sistema solar

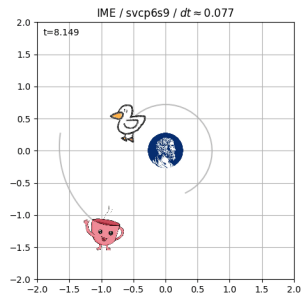


Figura: Sistema IME

Enunciado

O PNCG é um problema com N partículas com massas m_a e posições \mathbf{q}_a , regidas unicamente pelo potencial newtoniano:

$$\ddot{\mathbf{q}}_a = \sum_{b \neq a} m_b \frac{\mathbf{q}_b - \mathbf{q}_a}{\|\mathbf{q}_b - \mathbf{q}_a\|^3} = -\frac{1}{m_a} \frac{\partial V}{\partial \mathbf{q}_a}, \quad a = 1, 2, \dots, N.^a$$

^aAqui omitimos a constante G por facilidade, tomando $G = 1$ e ignorando suas dimensões.

Enunciado

O PNCG é um problema com N partículas com massas m_a e posições \mathbf{q}_a , regidas unicamente pelo potencial newtoniano:

$$\ddot{\mathbf{q}}_a = \sum_{b \neq a} m_b \frac{\mathbf{q}_b - \mathbf{q}_a}{\|\mathbf{q}_b - \mathbf{q}_a\|^3} = -\frac{1}{m_a} \frac{\partial V}{\partial \mathbf{q}_a}, \quad a = 1, 2, \dots, N.^a$$

^aAqui omitimos a constante G por facilidade, tomando $G = 1$ e ignorando suas dimensões.

Forma Hamiltoniana

Tomando o momento generalizado \mathbf{p}_a , podemos reescrever o problema via equações de Hamilton:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{q}}_a = \partial H / \partial \mathbf{p}_a, \\ \dot{\mathbf{p}}_a = -\partial H / \partial \mathbf{q}_a \end{cases}, \quad H = \sum_{a=1}^N \frac{\|\mathbf{p}_a\|^2}{2m_a} + V(\mathbf{q}).$$

PNCG: Integrais primeiras

Integrais primeiras

O PNCG (em 3 dimensões) tem 10 integrais primeiras.

- ① Energia total $E \equiv H$;
- ② Momento angular total $\mathbf{J} = \sum_{a=1}^N \mathbf{q}_a \times \mathbf{p}_a$ (3 componentes);
- ③ Momento linear total $\mathbf{P} = \sum_{a=1}^N \mathbf{p}_a$ (3 componentes);
- ④ Movimento do centro de massas: $\mathbf{G} = M\mathbf{q}_{cm} - t\mathbf{P}$ (3 componentes).

Centro de massas

O PNCG é invariante por translações, então tomamos sempre $\mathbf{q}_{cm}(t_0) = \mathbf{0}$ sem perder generalidade.

Parte II: Questões específicas

- Como lidar com colisões?
- Gerando valores iniciais

Colisões (1/2)

Colisões (ou aproximações intensas) são um problema nesse caso!

Mas temos algumas formas de lidar com elas...

Colisões (1/2)

Colisões (ou aproximações intensas) são um problema nesse caso!

Mas temos algumas formas de lidar com elas...

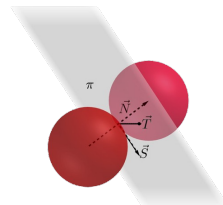
- Regularizar colisões:
 - Levi-Civita, Kustaanheimo-Stiefel, Aarseth-Zare, etc;
 - Amplamente utilizados. Mas não implementamos.

Colisões (1/2)

Colisões (ou aproximações intensas) são um problema nesse caso!

Mas temos algumas formas de lidar com elas...

- Regularizar colisões:
 - Levi-Civita, Kustaanheimo-Stiefel, Aarseth-Zare, etc;
 - Amplamente utilizados. Mas não implementamos.
- Regularizar colisões aproximadamente (e.g., colisões elásticas com base em densidade);



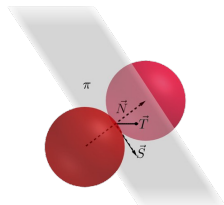
Colisões (1/2)

Colisões (ou aproximações intensas) são um problema nesse caso!

Mas temos algumas formas de lidar com elas...

- Regularizar colisões:
 - Levi-Civita, Kustaanheimo-Stiefel, Aarseth-Zare, etc;
 - Amplamente utilizados. Mas não implementamos.
- Regularizar colisões aproximadamente (e.g., colisões elásticas com base em densidade);
- Amortecer o potencial: para $\epsilon > 0$,

$$V = - \sum_{a < b} \frac{m_a m_b}{\sqrt{\|\mathbf{q}_b - \mathbf{q}_a\|^2 + \epsilon^2}}.$$



Colisões (2/2)

Exemplos

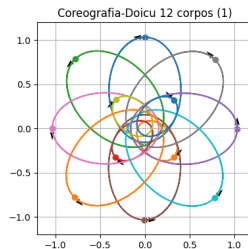
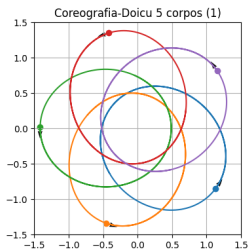
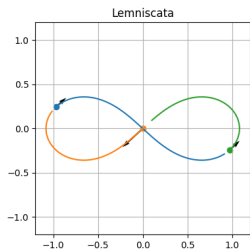
Problema IAU-25 via svcp6s9 com $h = 10^{-4}$.

- Potencial amortecido com $\varepsilon = 0.1$;
- Potencial amortecido com $\varepsilon = 0.05$;
- Choques com raio $r = 0.1$;
- Choques com raio $r = 0.05$.

[Vídeos dos exemplos.](#)

Valores iniciais (1/2)

- Existem conjuntos de valores iniciais para os quais conhecemos a solução do problema, as *coreografias*.
- São úteis numericamente para testar diferentes métodos de integração.
- Algumas coreografias.



Sorteando valores iniciais (2/2)

Ideia

Nosso interesse era em problemas com integrais primeiras específicas:

- 1 Com alguma distribuição, geramos valores iniciais;
- 2 Condicionamos os valores gerados para obter as integrais primeiras desejadas.

Sorteando valores iniciais (2/2)

Ideia

Nosso interesse era em problemas com integrais primeiras específicas:

- 1 Com alguma distribuição, geramos valores iniciais;
- 2 Condicionamos os valores gerados para obter as integrais primeiras desejadas.

Métodos

- Iterativo (funciona sempre...).
- Direto (necessita potencial homogêneo).

Detalhes aqui.

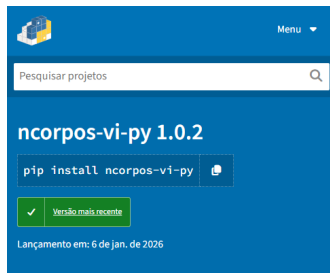


Figura:
<https://pypi.org/project/ncorpos-vi-py/>

Parte III: Integração numérica

- Métodos de passo único;
- Métodos simpléticos;
- Corretor numérico;
- Métodos multipasso.

Métodos de passo único (1/2)

Servem para quaisquer PVI de EDO bem-posto:

$$\mathbf{y}'(t) = \mathbf{f}(t, \mathbf{y}(t)), \quad \mathbf{y}(t_0) = \mathbf{y}_0.$$

São obtidos pensando-se na série de Taylor da solução.

Métodos de passo único

$$\mathbf{y}(t_k + h) \approx \mathbf{y}_{k+1} = \mathbf{y}_k + h\Phi_h(\mathbf{y}_k, \mathbf{y}_{k+1}).$$

Métodos de passo único (1/2)

Servem para quaisquer PVI de EDO bem-posto:

$$\mathbf{y}'(t) = \mathbf{f}(t, \mathbf{y}(t)), \quad \mathbf{y}(t_0) = \mathbf{y}_0.$$

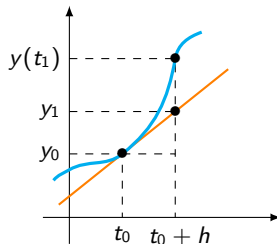
São obtidos pensando-se na série de Taylor da solução.

Métodos de passo único

$$\mathbf{y}(t_k + h) \approx \mathbf{y}_{k+1} = \mathbf{y}_k + h\Phi_h(\mathbf{y}_k, \mathbf{y}_{k+1}).$$

Exemplos de 1ª ordem

- Euler Explícito: $\mathbf{y}_{k+1} = \mathbf{y}_k + hf(t_k, \mathbf{y}_k)$.
- Euler Implícito: $\mathbf{y}_{k+1} = \mathbf{y}_k + hf(t_{k+1}, \mathbf{y}_{k+1})$.



Métodos de passo único (1/2)

Servem para quaisquer PVI de EDO bem-posto:

$$\mathbf{y}'(t) = \mathbf{f}(t, \mathbf{y}(t)), \quad \mathbf{y}(t_0) = \mathbf{y}_0.$$

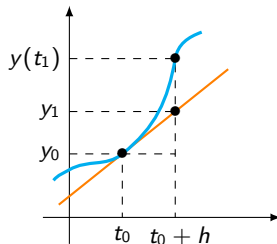
São obtidos pensando-se na série de Taylor da solução.

Métodos de passo único

$$\mathbf{y}(t_k + h) \approx \mathbf{y}_{k+1} = \mathbf{y}_k + h\Phi_h(\mathbf{y}_k, \mathbf{y}_{k+1}).$$

Exemplos de 1ª ordem

- Euler Explícito: $\mathbf{y}_{k+1} = \mathbf{y}_k + hf(t_k, \mathbf{y}_k)$.
- Euler Implícito: $\mathbf{y}_{k+1} = \mathbf{y}_k + hf(t_{k+1}, \mathbf{y}_{k+1})$.



- Podemos usar várias f fazendo uma média ponderada. Esses são os métodos de Runge-Kutta!

Testes com métodos de passo único gerais (2/2)

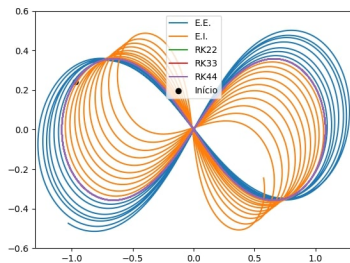


Figura: Lemniscata com $h = 10^{-3}$

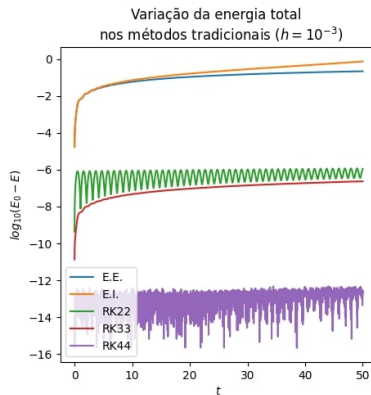


Figura: Variação da energia total na lemniscata com $h = 10^{-3}$.

Integração numérica: Métodos simpléticos (1/13)

Métodos gerais

- Consideram:
 - Valor inicial;
 - Derivada.

Integração numérica: Métodos simpléticos (1/13)

Métodos gerais

- Consideram:
 - Valor inicial;
 - Derivada.
- \Rightarrow Equação modificada tem geometria própria.

Integração numérica: Métodos simpléticos (1/13)

Métodos gerais

- Consideram:
 - Valor inicial;
 - Derivada.
- \Rightarrow Equação modificada tem geometria própria.
- \Rightarrow Erro na energia: $c \cdot t^{1/2}$
(Brouwer, 1937)

Integração numérica: Métodos simpléticos (1/13)

Métodos gerais

- Consideram:
 - Valor inicial;
 - Derivada.
- \Rightarrow Equação modificada tem geometria própria.
- \Rightarrow Erro na energia: $c \cdot t^{1/2}$
(Brouwer, 1937)

Métodos simpléticos

- Consideram:
 - Valor inicial;
 - Derivada;
 - Geometria do sistema!

Integração numérica: Métodos simpléticos (1/13)

Métodos gerais

- Consideram:
 - Valor inicial;
 - Derivada.
- \Rightarrow Equação modificada tem geometria própria.
- \Rightarrow Erro na energia: $c \cdot t^{1/2}$
(Brouwer, 1937)

Métodos simpléticos

- Consideram:
 - Valor inicial;
 - Derivada;
 - Geometria do sistema!
- \Rightarrow Equação modificada tem a mesma geometria!

Integração numérica: Métodos simpléticos (1/13)

Métodos gerais

- Consideram:
 - Valor inicial;
 - Derivada.
- \Rightarrow Equação modificada tem geometria própria.
- \Rightarrow Erro na energia: $c \cdot t^{1/2}$
(Brouwer, 1937)

Métodos simpléticos

- Consideram:
 - Valor inicial;
 - Derivada;
 - Geometria do sistema!
- \Rightarrow Equação modificada tem a mesma geometria!
- \Rightarrow Hamiltoniana modificada.

Integração numérica: Métodos simpléticos (1/13)

Métodos gerais

- Consideram:
 - Valor inicial;
 - Derivada.
- \Rightarrow Equação modificada tem geometria própria.
- \Rightarrow Erro na energia: $c \cdot t^{1/2}$ (Brouwer, 1937)

Métodos simpléticos

- Consideram:
 - Valor inicial;
 - Derivada;
 - Geometria do sistema!
- \Rightarrow Equação modificada tem a mesma geometria!
- \Rightarrow Hamiltoniana modificada.

Caracterização

A aplicação $\Psi_k : \mathbf{z}_k \rightarrow \mathbf{z}_{k+1}$, $\mathbf{z}_k = (\mathbf{q}_k, \mathbf{p}_k)$, é simplética se:

$$(D\Psi_h)\Omega(D\Psi_h)^T = \Omega. \quad (1)$$

Aplicações simpléticas preservam área.

Construção de métodos para hamiltonianas separáveis (2/13)

Para uma hamiltoniana separável $H(\mathbf{q}, \mathbf{p}) = T(\mathbf{p}) + V(\mathbf{q})$, separamos o problema em dois:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{q}} = \nabla_{\mathbf{p}} T(\mathbf{p}), \\ \dot{\mathbf{p}} = \mathbf{0}, \end{cases}, \quad \begin{cases} \dot{\mathbf{q}} = \mathbf{0}, \\ \dot{\mathbf{p}} = -\nabla_{\mathbf{q}} V(\mathbf{q}). \end{cases}$$

Construção de métodos para hamiltonianas separáveis (2/13)

Para uma hamiltoniana separável $H(\mathbf{q}, \mathbf{p}) = T(\mathbf{p}) + V(\mathbf{q})$, separamos o problema em dois:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{q}} = \nabla_{\mathbf{p}} T(\mathbf{p}), \\ \dot{\mathbf{p}} = \mathbf{0}, \end{cases}, \quad \begin{cases} \dot{\mathbf{q}} = \mathbf{0}, \\ \dot{\mathbf{p}} = -\nabla_{\mathbf{q}} V(\mathbf{q}). \end{cases}$$

Podemos obter os respectivos fluxos explicitamente:

$$\Phi_{\tau, T}(\mathbf{z}) = \begin{bmatrix} \mathbf{q} + \tau \nabla_{\mathbf{p}} T(\mathbf{p}) \\ \mathbf{p} \end{bmatrix}, \quad \Phi_{\tau, V}(\mathbf{z}) = \begin{bmatrix} \mathbf{q} \\ \mathbf{p} - \tau \nabla_{\mathbf{q}} V(\mathbf{q}) \end{bmatrix}.$$

Construção de métodos para hamiltonianas separáveis (2/13)

Para uma hamiltoniana separável $H(\mathbf{q}, \mathbf{p}) = T(\mathbf{p}) + V(\mathbf{q})$, separamos o problema em dois:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{q}} = \nabla_{\mathbf{p}} T(\mathbf{p}), \\ \dot{\mathbf{p}} = \mathbf{0}, \end{cases}, \quad \begin{cases} \dot{\mathbf{q}} = \mathbf{0}, \\ \dot{\mathbf{p}} = -\nabla_{\mathbf{q}} V(\mathbf{q}). \end{cases}$$

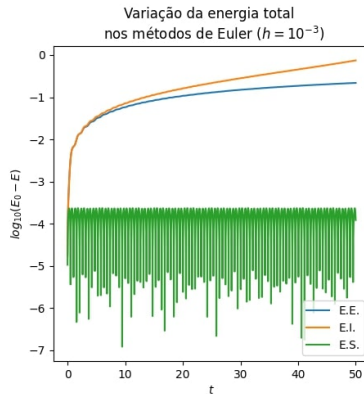
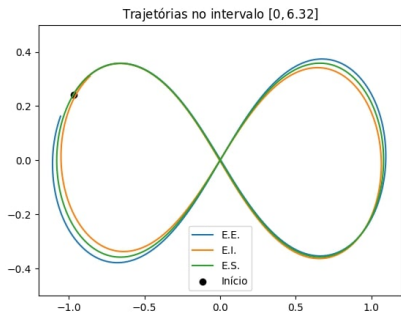
Podemos obter os respectivos fluxos explicitamente:

$$\Phi_{\tau, T}(\mathbf{z}) = \begin{bmatrix} \mathbf{q} + \tau \nabla_{\mathbf{p}} T(\mathbf{p}) \\ \mathbf{p} \end{bmatrix}, \quad \Phi_{\tau, V}(\mathbf{z}) = \begin{bmatrix} \mathbf{q} \\ \mathbf{p} - \tau \nabla_{\mathbf{q}} V(\mathbf{q}) \end{bmatrix}.$$

A aplicação composta $\Phi_{\tau} = \Phi_{\tau, T} \circ \Phi_{\tau, V}$ é o chamado Método de Euler Simplético (ou semi-implícito):

$$\mathbf{q}_{k+1} = \mathbf{q}_k + h \nabla_{\mathbf{p}} T(\mathbf{p}_k), \quad \mathbf{p}_{k+1} = \mathbf{p}_k - h \nabla_{\mathbf{q}} V(\mathbf{q}_{k+1}).$$

Euler explícito vs implícito vs simplético (3/13)



Euler simplético vs Runge-Kuttas (4/13)

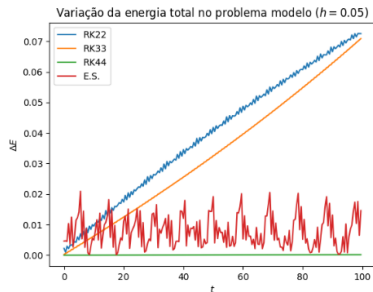
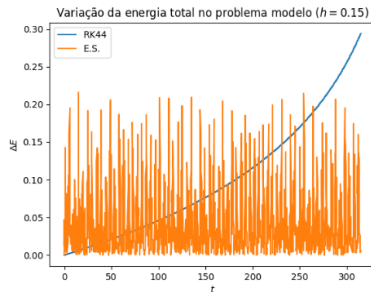
(a) Intervalo $[0, 100]$ e $h = 0.05$.(b) Intervalo $[0, 300]$ e $h = 0.15$.

Figura: Variação da energia total na simulação da lemniscata com RK22, RK33, RK44 e Euler Simplético.

Euler explícito vs implícito vs simplético (5/13)

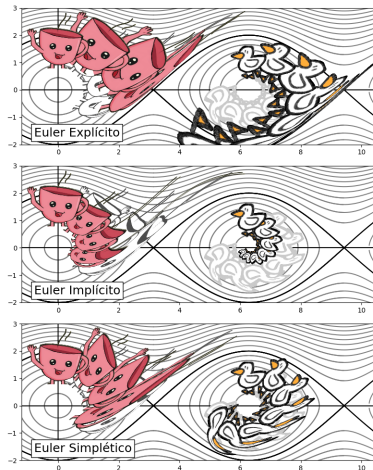


Figura: Métodos de Euler aplicados no pêndulo com $dt = \pi/4$.

Métodos via composição (6/13)

- Podemos obter outros métodos simpléticos com mais composições:

$$\Phi_h = \Phi_{d_s h, V} \circ \Phi_{c_s h, T} \circ \dots \circ \Phi_{d_1 h, V} \circ \Phi_{c_1 h, T}.$$

Métodos via composição (6/13)

- Podemos obter outros métodos simpléticos com mais composições:

$$\Phi_h = \Phi_{d_s h, V} \circ \Phi_{c_s h, T} \circ \dots \circ \Phi_{d_1 h, V} \circ \Phi_{c_1 h, T}.$$

Velocity-Verlet

Com $d_1 = d_2 = 1/2$ e $c_1 = 0$ e $c_2 = 1$, temos um método consistente, simétrico, explícito, simplético e de 2ª ordem:

$$\begin{aligned} \mathbf{p}_{k+1/2} &= \mathbf{p}_k - \frac{h}{2} \nabla_{\mathbf{q}} V(\mathbf{q}_k) \\ \mathbf{q}_{k+1} &= \mathbf{q}_k + h \nabla_{\mathbf{p}} T(\mathbf{p}_{k+1/2}), \\ \mathbf{p}_{k+1} &= \mathbf{p}_{k+1/2} - \frac{h}{2} \nabla_{\mathbf{q}} V(\mathbf{q}_{k+1}) \end{aligned}$$

Runge-Kutta de ordem 2 vs Velocity-Verlet (7/13)

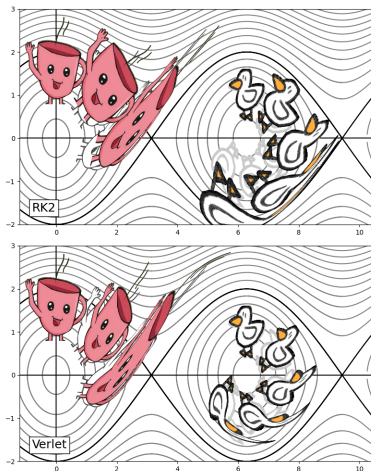


Figura: Métodos RK22 (Exp.) e Velocity-Verlet aplicados no pêndulo com $dt = \pi/3$.

Métodos de Ruth (8/13)

Métodos de ordem mais alta podem ser obtidos através da fórmula de Baker-Campbell-Hausdorff (BCH).

Ruth de 3ª Ordem (Ruth, 1983)

$$\begin{array}{lll}
 c_1 = 1, & c_2 = -2/3, & c_3 = 2/3, \\
 d_1 = -1/24 & d_2 = 3/4, & d_3 = 7/24.
 \end{array}$$

Ruth de 4ª Ordem (Forest; Ruth, 1990)

$$\begin{array}{ll}
 c_1 = c_4 = \frac{1}{2(2 - 2^{1/3})}, & c_2 = c_3 = \frac{1 - 2^{1/3}}{2(2 - 2^{1/3})}, \\
 d_1 = d_3 = \frac{1}{2 - 2^{1/3}}, & d_2 = -\frac{2^{1/3}}{2 - 2^{1/3}}, \quad d_4 = 0.
 \end{array}$$

Métodos de alta ordem via composição de métodos simétricos (9/13)

Se Φ_h é o método de Verlet, podemos obter um método de ordem (par) mais alta que é simplético, simétrico e reversível. Estes são os Störmer-Verlet Compostos (SVC):

$$\Psi_h = \Phi_{\gamma_s h} \circ \dots \circ \Phi_{\gamma_2 h} \circ \Phi_{\gamma_1 h}.$$

Métodos de alta ordem via composição de métodos simétricos (9/13)

Se Φ_h é o método de Verlet, podemos obter um método de ordem (par) mais alta que é simplético, simétrico e reversível. Estes são os Störmer-Verlet Compostos (SVC):

$$\Psi_h = \Phi_{\gamma_s h} \circ \dots \circ \Phi_{\gamma_2 h} \circ \Phi_{\gamma_1 h}.$$

Desvantagem: Precisamos de muitos estágios para aumentar a ordem!

Métodos de alta ordem via composição de métodos simétricos (9/13)

Se Φ_h é o método de Verlet, podemos obter um método de ordem (par) mais alta que é simplético, simétrico e reversível. Estes são os Störmer-Verlet Compostos (SVC):

$$\Psi_h = \Phi_{\gamma_5 h} \circ \dots \circ \Phi_{\gamma_2 h} \circ \Phi_{\gamma_1 h}.$$

Desvantagem: Precisamos de muitos estágios para aumentar a ordem!

Métodos de ordem 8 e 10 (Hairer *et al.*, 2006)

- Métodos SVC de 8ª ordem precisam de 15 estágios;
- Métodos SVC de 10ª ordem precisam de 31 estágios.

Há métodos de Runge-Kutta Simpléticos? (10/13)

Runge-Kuttas Simpléticos (Hairer *et al.*, 2006, p.192)

Teorema: Se os coeficientes de um método de Runge-Kutta de R estágios são tais que

$$b_i a_{ij} + b_j a_{ji} - b_i b_j = 0, \quad i, j = 1, \dots, R,$$

então o método é simplético.

Desvantagem: Todo método de Runge-Kutta simplético é implícito!

Métodos de Runge-Kutta-Nyström (RKN) (11/13)

Se $T(\mathbf{p}) = \frac{1}{2}\mathbf{p}^T \mathbf{M}^{-1}\mathbf{p}$ e $-\nabla_{\mathbf{q}_a} V(\mathbf{q}) = \mathbf{F}_a(\mathbf{q})$, temos um método RKN:

$$\mathbf{y}_i = \mathbf{q}_k + c_i h \frac{\mathbf{p}_k}{m} + h^2 \sum_{j=1}^s a_{ij} \frac{\mathbf{F}(\mathbf{y}_j)}{m}, \quad i = 1, 2, \dots, s,$$

$$\mathbf{q}_{k+1} = \mathbf{q}_k + h \frac{\mathbf{p}_k}{m} + h^2 \sum_{i=1}^s b_i \frac{\mathbf{F}(\mathbf{y}_i)}{m},$$

$$\mathbf{p}_{k+1} = \mathbf{p}_k + h \sum_{i=1}^s B_i \mathbf{F}(\mathbf{y}_i),$$

para constantes \mathbf{A} , \mathbf{b} , \mathbf{c} e B_1, \dots, B_s .

(Okunbor; Skeel, 1994)

- RKN551: Runge-Kutta-Nyström de 5^a ordem e 5 estágios.
- RKN671: Runge-Kutta-Nyström de 6^a ordem e 7 estágios.

Métodos simpléticos implementados (12/13)

Método	Ordem	Estágios	Autoria
Euler Simplético	1	1	de Vogelaere, 1956
Velocity-Verlet	2	2	de Vogelaere, 1956
Ruth3	3	3	Ruth, 1983
Ruth4	4	4	Forest & Ruth, 1990
ecp4s5	4	5	McLachlan, 1995
ecp4s6	4	6	Blanes & Moan, 2002
RKN551	5	5	Okunbor & Skeel, 1994
RKN671	6	7	Okunbor & Skeel, 1994
svcp6s9	6	9	Kahan & Li, 1997
svcp8s15	8	15	Suzuki & Umeno, 1993
svcp10s35	10	35	Sofroniou & Spaletta (2004)

Comparação dos métodos simpléticos implementados (13/13)

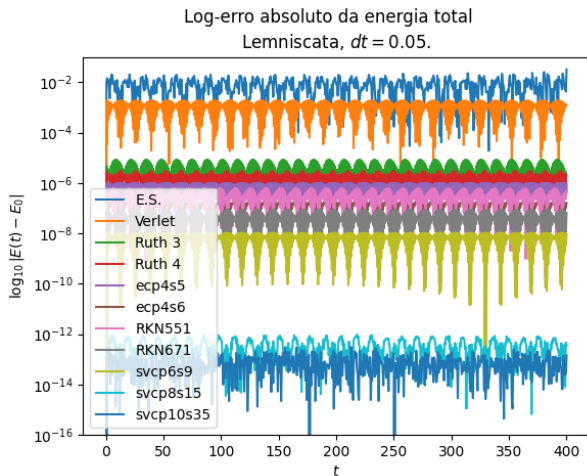


Figura: Variação da energia total para os métodos simpléticos apresentados. A lemniscata foi integrada no intervalo $[0, 400]$ com tamanho de passo $h = 0.05$.

Corretor numérico (Nacozy, 1972) (1/3)

Outra forma de melhorar os resultados é aplicar correções sobre as aproximações.

Corretor numérico (Nacozy, 1972) (1/3)

Outra forma de melhorar os resultados é aplicar correções sobre as aproximações.

Considerando um PVI conservativo e $\Psi = (\psi_1, \dots, \psi_k)$ suas k integrais primeiras, se \mathbf{z}^* é uma aproximação de $\mathbf{z} = \mathbf{z}(t^*)$, temos por linearização

$$\mathbf{z} = \mathbf{z}^* + D\Psi(\mathbf{x}^*)^T \alpha,$$

onde α resolve

$$D\Psi(\mathbf{z}^*)D\Psi(\mathbf{z}_0)^T \alpha = \Psi(\mathbf{z}_0) - \Psi(\mathbf{z}^*).$$

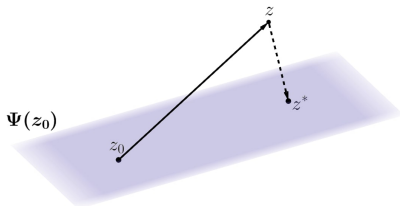


Figura: Visualização do corretor

Euler Explícito vs Euler Simplético vs Corrigidos (2/3)

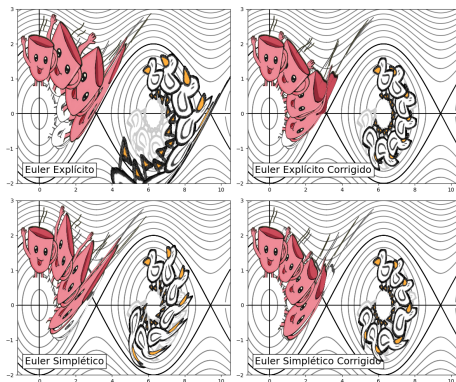


Figura: Euler Explícito e Euler Simplético originais e corrigidos para o pêndulo com $dt = \pi/3$.

Corretor numérico (3/3)

Vamos testar com o método de Euler explícito na lemniscata:

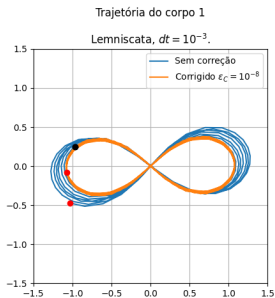


Figura: Lemniscata

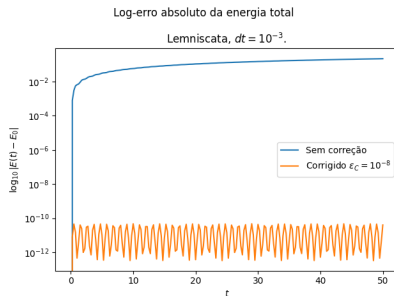


Figura: Erro na energia

Métodos multipasso (1/3)

Métodos multipasso lineares

- Em vez de fazer médias de derivadas, podemos usar valores de passos anteriores para obter aproximações.

$$y_{k+n} = - \sum_{j=0}^{n-1} \alpha_j y_{k+j} + h \sum_{j=0}^n \beta_{k+j} f(t_{k+j}, y_{k+j}).$$

- Enquanto Runge-Kuttas fazem muitos cálculos e descartam a maioria, os métodos multipasso reaproveitam o que já foi calculado.

Adams-Bashforth de 2 passos e ordem 2

$$y_{k+2} = y_{k+1} + \frac{h}{2} (3f(t_{k+1}, y_{k+1}) - f(t_k, y_k))$$

Métodos multipasso (2/3)

Vantagens

- Em métodos explícitos, só é preciso calcular f uma vez.
- Fáceis de se implementar e analisar.
- Existe um método de passo único que produz exatamente os mesmos resultados. (Hairer *et al.*, 2006, pp.573-576)
- Métodos simétricos preservam aproximadamente uma hamiltoniana perturbada.

Métodos multipasso (2/3)

Vantagens

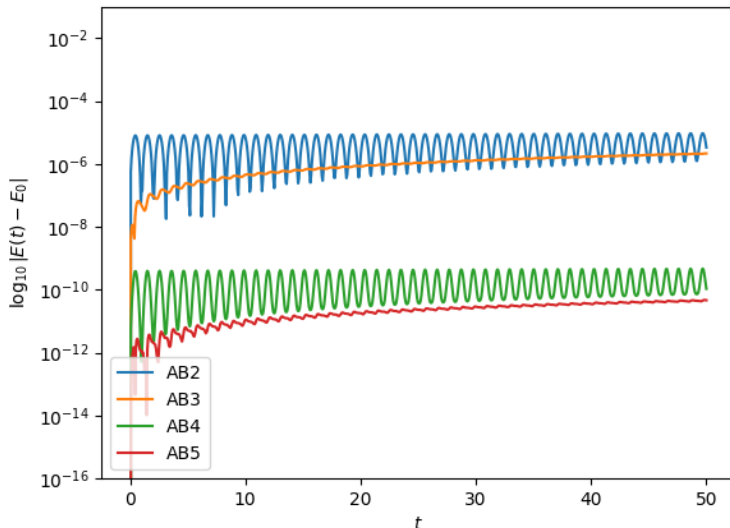
- Em métodos explícitos, só é preciso calcular f uma vez.
- Fáceis de se implementar e analisar.
- Existe um método de passo único que produz exatamente os mesmos resultados. (Hairer *et al.*, 2006, pp.573-576)
- Métodos simétricos preservam aproximadamente uma hamiltoniana perturbada.

Desvantagens

- Só funcionam sob trajetórias contínuas.
- **(Tang, 1993)** O método de passo único adjacente não pode ser simplético.
- Os modos parasitas podem acumular erros expressivos ao longo do tempo.

Métodos multipasso (3/3)

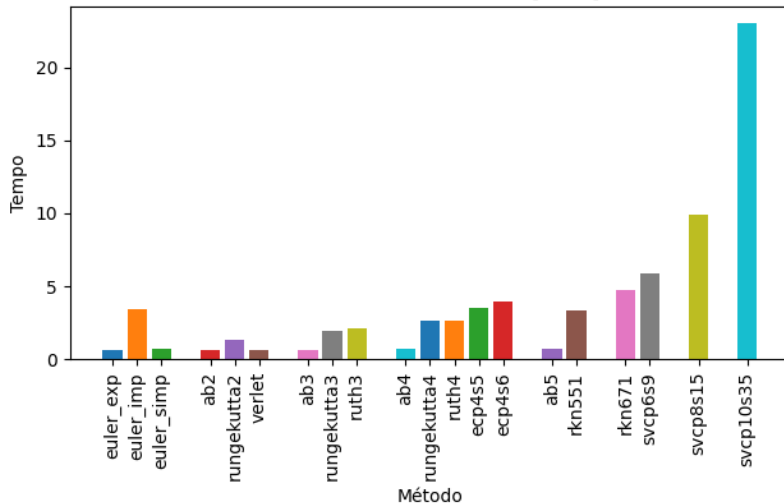
Log-erro absoluto da energia total
Lemniscata, $dt = 10^{-3}$.



Comparação de tempo entre os métodos

Tempo computacional de cada método

$N = 500$, $dt = 10^{-2}$, 10^{-1} , $[0, 10]$



Parte IV: Aplicações

Faz sentido tudo isso? (Aarseth, 2003, pp.234-240)

- O PNCG é um problema, no geral, caótico. Simulações numéricas nunca vão ser totalmente precisas. Faz sentido simular?
- Exemplo.

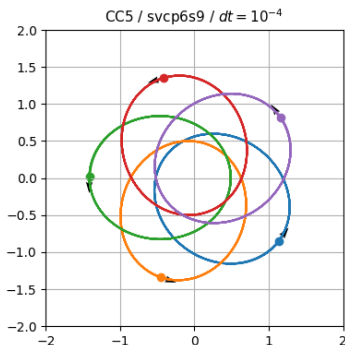


Figura: Original

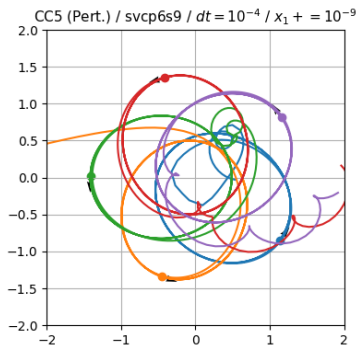


Figura: Perturbado (10^{-9})

Faz sentido tudo isso? (Aarseth, 2003, pp.234-240)

- Estatisticamente, faz sim!
- Trajetórias individuais podem não ser numericamente confiáveis...
- Mas a solução numérica não necessariamente é inválida!
- Shadow orbits... (Quinlan; Tremaine, 1992)

Exemplo

Exemplo com 700 corpos.

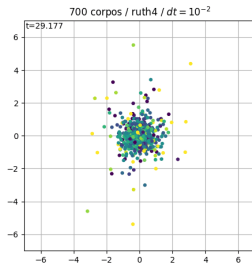


Figura: Integrado com Ruth4

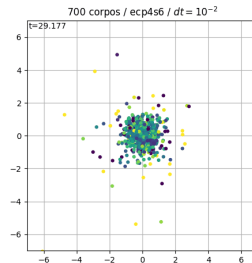


Figura: Integrado com ecp4s6

Exemplo

- O sistema cresce quase do mesmo jeito em ambos os casos...

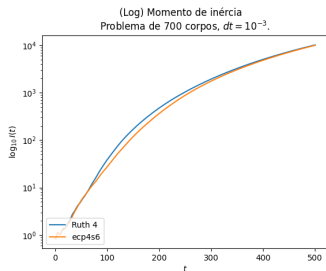


Figura: Inércia

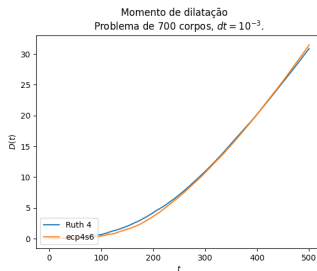


Figura: Dilatação

Exemplo

- O sistema cresce quase do mesmo jeito em ambos os casos...

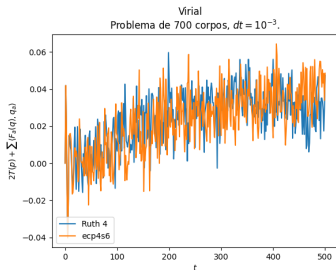


Figura: Virial

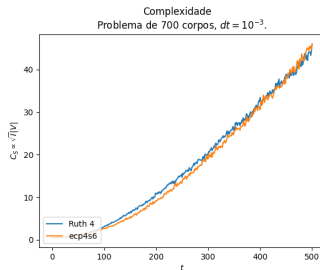
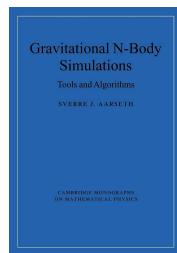
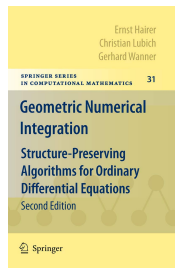


Figura: Complexidade

Outras possibilidades...

- Outros métodos/formas:
 - Implícitos;
 - Variacionais;
 - Exatos;
 - Tamanho de passo variável...
- Específicos:
 - Tamanhos de passo individuais;
 - *block-timesteps*;
 - Esquemas hierárquicos;
 - Wisdom-Holman (Sistema solar);
 - Barnes-Hut, *Particle-Mesh*, SPH...
- *Ao infinito e além!*



gravidade Fortran

Fortran 83.1% tamanho 221.6 KiB alterado january issues 10 open

JSON-Fortran v9.2.0 ncorpos-utilidades v1.0.1 ncorpos-valores-iniciais v0.2.5

Figura: <https://github.com/potalej/gravidade-fortran>

- O PNCG é muito amplo, problemas específicos são melhor resolvidos com soluções específicas. “Meus N-corpos, minhas regras.”

Obrigado!

Referências I



AARSETH, Sverre J. *Gravitational N-Body Simulations: Tools and Algorithms*. Cambridge: Cambridge University Press, 2003. (Cambridge Monographs on Mathematical Physics). ISBN 978-0-521-43272-6. DOI: [10.1017/CB09780511535246](https://doi.org/10.1017/CB09780511535246).



BROUWER, Dirk. On the accumulation of errors in numerical integration. *The Astronomical Journal*, American Astronomical Society, v. 46, p. 149, out. 1937. ISSN 0004-6256. DOI: [10.1086/105423](https://doi.org/10.1086/105423). Disponível em: <http://dx.doi.org/10.1086/105423>.



FOREST, Etienne; RUTH, Ronald D. Fourth-order symplectic integration. *Physica D: Nonlinear Phenomena*, v. 43, n. 1, p. 105–117, 1990. ISSN 0167-2789. DOI: [https://doi.org/10.1016/0167-2789\(90\)90019-L](https://doi.org/10.1016/0167-2789(90)90019-L). Disponível em: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/016727899090019L>.



HAIRER, Ernst; LUBICH, Christian; WANNER, Gerhard. *Geometric numerical integration*. 2. ed. Berlin, Germany: Springer, fev. 2006. (Springer Series in Computational Mathematics).

Referências II



NACOZY, Paul E. The Use of Integrals in Numerical Integrations of the N-Body Problem. *In: GRAVITATIONAL N-Body Problem. [S. l.]: Springer Netherlands, 1972. p. 153–164. ISBN 9789401028707. DOI: 10.1007/978-94-010-2870-7_18. Disponível em: http://dx.doi.org/10.1007/978-94-010-2870-7_18.*



OKUNBOR, Daniel I.; SKEEL, Robert D. Canonical Runge—Kutta—Nystrom methods of orders five and six. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, Elsevier BV, v. 51, n. 3, p. 375–382, jun. 1994. ISSN 0377-0427. DOI: 10.1016/0377-0427(92)00119-t. Disponível em: [http://dx.doi.org/10.1016/0377-0427\(92\)00119-T](http://dx.doi.org/10.1016/0377-0427(92)00119-T).





QUINLAN, Gerald D.; TREMAINE, Scott. On the reliability of gravitational N-body integrations. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, v. 259, n. 3, p. 505–518, dez. 1992. ISSN 0035-8711. DOI: 10.1093/mnras/259.3.505. eprint: <https://academic.oup.com/mnras/article-pdf/259/3/505/4109723/mnras259-0505.pdf>. Disponível em: <https://doi.org/10.1093/mnras/259.3.505>.



RUTH, Ronald. Canonical integration technique. *IEEE Transactions on Nuclear Science*, NS-30, p. 2669–2671, ago. 1983.

Referências III

-  SHAMPINE, L.F. Conservation laws and the numerical solution of ODEs. *Computers and Mathematics with Applications*, v. 12, 5, Part 2, p. 1287–1296, 1986.
-  SKEEL, Robert D.; CIEŚLIŃSKI, Jan L. *On the famous unpublished preprint "Methods of integration which preserve the contact transformation property of the Hamilton equations" by René De Vogelaere. [S. l.: s. n.], 2020. arXiv: 2003.12268 [math.NA]. Disponível em: <https://arxiv.org/abs/2003.12268>.*