

Explorando ‘Toy Models’ do Big-Bang Baseados em Mecânica Newtoniana Clássica de N-Corpos

Octavio Augusto Potalej

Eduardo Colli

IME/USP

oapotalej@usp.br

Objetivos

A evolução de sistemas gravitacionais é complexa, e simular numericamente o problema de N-corpos é um dos meios de estudá-los. Há diversos métodos de integração numérica, entre os quais aqueles que preservam a estrutura simplética do sistema e aqueles que necessitam de correções numéricas no decorrer da evolução.

O “toy-model” tem propriedades que permitem discutir características dinâmicas do universo, inclusive uma alternativa de setas do tempo oferecida pela Dinâmica de Formas a partir do Princípio de Mach-Poincaré, que não se baseia na entropia mas nas distâncias entre as partículas do sistema.

Estudamos o condicionamento inicial do problema, os métodos de integração, correções numéricas e testamos algumas das previsões feitas pela Dinâmica de Formas.

Métodos e Procedimentos

A teoria básica do problema de N-corpos foi consultada em [1]. O modelo utilizado conta com condições iniciais tais que todas as integrais primeiras do sistema (momentos e energia) são nulas, conforme proposto por [2] e [3]. As simulações foram desenvolvidas em Python [4] e em Fortran [5]. Foram implementados os métodos de integração numérica Runge-Kutta de ordem 4 (RK4) e Velocity Verlet (VV), estudados a partir de [6] e [7]. Também foram estudados e testados o método de Runge-Kutta-Fehlberg (RKF45) e um método de integração

conservativa proposto por [8], que não foram utilizados nas simulações por suas limitações técnicas. Foi desenvolvida uma correção numérica a partir da condição de 1ª ordem de Karush-Kuhn-Tucker (KKT) conforme [9], para obter maior precisão com o RK4. Para evitar singularidades, foram implementadas colisões perfeitamente elásticas.

Resultados

O uso do RK4 sem correção numérica leva a soluções inverossímeis para as condições iniciais oferecidas, pois as trajetórias obtidas se distanciam das curvas de nível definidas no espaço de fases pelas integrais primeiras, como na figura 1.

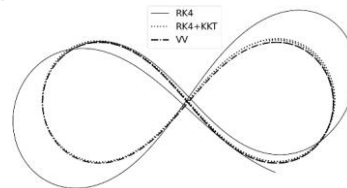


Figura 1: Uma trajetória em um problema de 3 corpos via RK4, RK4 com correção e VV.

A aplicação do corretor baseado em KKT apresentou maior precisão que os métodos RK4 e VV, com a exceção de casos em que a correção diminui a distância entre corpos já próximos, desestabilizando a integração. Em tais casos, as colisões elásticas preservaram a estrutura simplética inicial, embora seu uso gere um sistema dinâmico diferente do sem colisões. Ainda assim, foi um caso de estudo interessante no qual se pôde observar que as previsões de [2], apresentadas a seguir, se mantêm.

Duas medidas de dispersão definidas no problema de N-corpos são a energia potencial V , dominada pela menor distância entre os corpos, e o momento de inércia I , dominado pela maior distância, dadas por:

$$V = - \sum_{a < b} \frac{G m_a m_b}{r_{ab}}, \quad I = \sum_{a < b} \frac{m_a m_b r_{ab}^2}{M}, \quad (1)$$

onde $r_{ab} = \|r_a - r_b\|$ e $M = \sum_{a=1}^N m_a$, sendo $m_a \in \mathbb{R}$, $r_a, p_a \in \mathbb{R}^3$, $1 \leq a \leq N$, respectivamente, as massas, posições e momentos lineares dos corpos. A relação de Lagrange-Jacobi, dada por

$$\ddot{I} = 4E - 2V, \quad (2)$$

onde E é a energia total, indica que, se $E \geq 0$, o momento de inércia tem concavidade para cima, sendo seu ponto de mínimo chamado *Ponto de Janus*. Definindo

$$D = \frac{1}{2} \dot{I} = \sum_{a=1}^N \langle r_a, p_a \rangle \quad (3)$$

como o *momento de dilatação*, tem-se uma função monótona crescente tal que $D = 0$ corresponde ao Ponto de Janus e que, assim, pode ser utilizada como medida de evolução do sistema. Isso pode ser feito com a normalização:

$$\sigma_a = \sqrt{\frac{m_a}{I}} r_a, \quad \pi_a = \sqrt{\frac{I}{m_a}} p_a - D \sigma_a, \quad (4)$$

sendo σ_a as *coordenadas de forma* e π_a o *momento de forma*. Nas novas coordenadas, que são adimensionais, o movimento é limitado a uma esfera unitária.

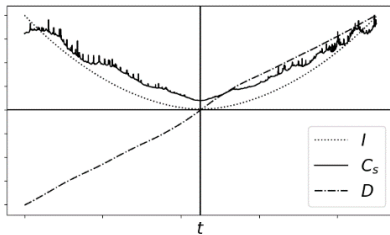


Figura 2: Evolução de um problema de 100 corpos.

É possível obter ainda uma medida de dispersão adimensional e que distingue o ponto de virada chamada *complexidade*, definida por:

$$C_s = |V| \sqrt{I} M^{-2}. \quad (5)$$

Identificando a seta do tempo como uma direção em que a complexidade cresce, a simetria no entorno do Ponto de Janus fornece um passado comum e dois futuros possíveis, com evoluções semelhantes, como pode ser

visto na figura 2. Ademais, é impossível identificar em qual dos futuros um sistema se encontra evoluindo.

Conclusões

O “toy-model” de N-corpos, apesar de ter um enunciado simples, é um problema desafiador do ponto de vista computacional, pois o custo de computação aumenta polinomialmente com o aumento no número de corpos. Ainda assim, simulá-lo permite obter informações do universo em grandes escalas, como o estudado acerca de setas do tempo.

Por fim, o modelo proposto pela Dinâmica de Formas é consistente mesmo com o acréscimo de colisões, o que indica sua extensibilidade para “toy-models” mais complexos, como com a adição de colisões inelásticas, rotações individuais, entre outros, que pretendemos investigar.

Referências

- [1] VOLCHAN, S. Uma Introdução à Mecânica Celeste. Rio de Janeiro: IMPA, 2007.
- [2] BARBOUR, J.; KOSLOWSKI, T.; MERCATI, F. Phys. Ver. Lett. **113**, 181101 (2014).
- [3] BARBOUR, J.; KOSLOWSKI, T.; MERCATI, F. The solution to the problem of time in shape dynamics. Classical and Quantum Gravity, v. 31, n. 15, p. 155001, 14 jul. 2014.
- [4] POTALEJ, O. A. Gravidade-Python. GitHub, 2023: <https://github.com/Potalej/gravidade-python>.
- [5] POTALEJ, O. A. Gravidade-Fortran. GitHub, 2023: <https://github.com/Potalej/gravidade-fortran>.
- [6] ROMA, A. Métodos para a solução numérica de equações diferenciais ordinárias a valores iniciais, 2014. Notas de aula.
- [7] HAIRER, E.; WANNER, G.; LUBICH, C. Geometric Numerical Integration: Structure-Preserving Algorithms for Ordinary Differential Equations. Nova Iorque: Springer, 2006.
- [8] BOWMAN, J. C; KOTOVYCH, O. An exactly conservative integrator for the N-body problem. Journal of Physics A: Mathematical and General, v. 35, n. 37, p.7849-7863, 5 set. 2002.
- [9] BERTSEKAS, D. P. Nonlinear Programming. 3.ed. Nashua: Athena Scientific, 2016.