

# Simulação Numérica do Problema de N-Corpos Gravitacional

Octavio Augusto Potalej

Instituto de Matemática e Estatística  
Universidade de São Paulo

Outubro, 2025

# Motivação

- Começamos estudando um artigo sobre setas do tempo gravitacionais;
- Precisamos nos aprofundar no Problema de N-Corpos;
- Decidimos simular o PNCG numericamente para visualizar a teoria;
- Com simulações, podemos visualizar resultados teóricos e até obter ideias novas sobre o problema!

## Identification of a gravitational arrow of time

Julian Barbour,<sup>1</sup> Tim Koslowski,<sup>2</sup> and Flavio Mercati<sup>3</sup>

<sup>1</sup>College Farm, South Newington, Banbury, Oxon, OX15 4JG UK,

Visiting Professor in Physics at the University of Oxford, UK,

<sup>2</sup>University of New Brunswick, Fredericton, NB, E3B 5A3 Canada,

<sup>3</sup>Perimeter Institute for Theoretical Physics, 31 Caroline Street North, Waterloo, ON, N2L 2Y5 Canada.

It is widely believed that special initial conditions must be imposed on any time-symmetric law if its solutions are to exhibit behavior of any kind that defines an 'arrow of time'. We show that this is not so. The simplest non-trivial time-symmetric law that can be used to model a dynamically closed universe is the Newtonian  $N$ -body problem with vanishing total energy and angular momentum. Because of special properties of this system (likely to be shared by any law of the Universe), its typical solutions all divide at a uniquely defined point into two halves. In each a well-defined measure of shape complexity fluctuates but grows irreversibly between rising bounds from that point. Structures that store dynamical information are created as the complexity grows and act as 'records'. Each solution can be viewed as having a single past and two distinct futures emerging from it. Any internal observer must be in one half of the solution and will only be aware of the records of one branch and deduce a unique past and future direction from inspection of the available records.

Figura: Capa do artigo

# Parte I: O Problema

- Enunciado;
- Integrais primeiras;
- Medidas de escala.

## Enunciado

O PNCG é um problema com  $N$  partículas com massas  $m_a$  e posições  $\mathbf{q}_a$ , regidas unicamente pelo potencial newtoniano:

$$\ddot{\mathbf{q}}_a = \sum_{b \neq a} m_b \frac{\mathbf{q}_b - \mathbf{q}_a}{\|\mathbf{q}_b - \mathbf{q}_a\|^3} = -\frac{1}{m_a} \frac{\partial V}{\partial \mathbf{q}_a}, \quad a = 1, 2, \dots, N.^a$$

<sup>a</sup>Aqui omitimos a constante  $G$  por facilidade, tomando  $G = 1$  e ignorando suas dimensões.

## Forma Hamiltoniana

Tomando o momento generalizado  $\mathbf{p}_a = m_a \dot{\mathbf{q}}_a$ , podemos reescrever o problema via equações de Hamilton:

$$\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{q}}_a \\ \dot{\mathbf{p}}_a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & I \\ -I & \mathbf{0} \end{bmatrix} \nabla H(\mathbf{q}, \mathbf{p}) = \Omega \nabla H(\mathbf{q}, \mathbf{p}), \quad H = \sum_{a=1}^N \frac{\|\mathbf{p}_a\|^2}{2m_a} + V(\mathbf{q}).$$

# PNCG: Integrais primeiras

## Integrais primeiras

O PNCG (em 3 dimensões) tem 10 integrais primeiras.

- 1 Energia total  $H$ ;
- 2 Momento angular total  $\mathbf{J} = \sum_{a=1}^N \mathbf{q}_a \times \mathbf{p}_a$ ;
- 3 Momento linear total  $\mathbf{P} = \sum_{a=1}^N \mathbf{p}_a$ ;
- 4 Movimento do centro de massas:  $\mathbf{G} = M\mathbf{q}_{cm} - t\mathbf{P}$ .

## Centro de massas

- O PNCG é invariante por translações, então tomamos sempre  $\mathbf{q}_{cm}(t_0) = \mathbf{0}$ ;
- Por outros motivos, sempre tomamos também que  $\mathbf{P} = \mathbf{0}$ , então  $\mathbf{q}_{cm}(t) = \mathbf{0}, \forall t$ , e que  $\mathbf{J} = \mathbf{0}$ .

# Medidas de escala

## Similaridade Dinâmica

O PNCG possui similaridade dinâmica, então um redimensionamento anisotrópico leva soluções em soluções:

$$\tilde{\mathbf{q}}(\tilde{t}) = \alpha \mathbf{q}(t), \quad \tilde{\mathbf{p}}(\tilde{t}) = \alpha^{-1/2} \mathbf{p}_a, \quad \tilde{t} = \alpha^{3/2} t, \quad \alpha > 0.$$

# Medidas de escala

## Similaridade Dinâmica

O PNCG possui similaridade dinâmica, então um redimensionamento anisotrópico leva soluções em soluções:

$$\tilde{\mathbf{q}}(\tilde{t}) = \alpha \mathbf{q}(t), \quad \tilde{\mathbf{p}}(\tilde{t}) = \alpha^{-1/2} \mathbf{p}_a, \quad \tilde{t} = \alpha^{3/2} t, \quad \alpha > 0.$$

## Momento de inércia

Podemos medir um tamanho global de um PNCG através do *momento de inércia*:

$$I := R^2 := \sum_{a=1}^N m_a \|\mathbf{q}_a\|^2.$$

# Evolução da escala

## Momento de dilatação

A evolução da escala é caracterizada pelo *momento de dilatação*:

$$D := \frac{1}{2} \dot{I} = \sum_{a=1}^N \langle \mathbf{q}_a, \mathbf{p}_a \rangle .$$

# Evolução da escala

## Momento de dilatação

A evolução da escala é caracterizada pelo *momento de dilatação*:

$$D := \frac{1}{2} \dot{I} = \sum_{a=1}^N \langle \mathbf{q}_a, \mathbf{p}_a \rangle.$$

## Identidade de Lagrange-Jacobi

Para um sistema com potencial  $V_k$  homogêneo de grau  $k$  e energia total  $E$ , vale:

$$\ddot{I} = 4E - 2(2 + k)V_k.$$

No PNCG,  $k = -1$ , então

$$\ddot{I} = 4E - 2V.$$

## Parte II: Integração numérica

- Métodos gerais;
- Métodos simpléticos;
- Corretor numérico.

# Métodos tradicionais/gerais

Os métodos tradicionais/gerais servem para quaisquer PVI de EDO.

$$\mathbf{y}'(t) = \mathbf{f}(t, \mathbf{y}(t)), \quad \mathbf{y}(t_0) = \mathbf{y}_0.$$

## Métodos de passo único

$$\mathbf{y}_{k+1} = \mathbf{y}_k + h\Phi_h(\mathbf{y}_k, \mathbf{y}_{k+1}).$$

## Exemplos de 1ª ordem

- Euler Explícito:  $\mathbf{y}_{k+1} = \mathbf{y}_k + hf(t_k, \mathbf{y}_k)$ .
- Euler Implícito:  $\mathbf{y}_{k+1} = \mathbf{y}_k + hf(t_{k+1}, \mathbf{y}_{k+1})$ .

# Métodos de Runge-Kutta

Podemos generalizar os métodos de Euler para ordens mais altas. Esses são chamados de Métodos de Runge-Kutta.

$$\mathbf{y}_{k+1} = \mathbf{y}_k + h \sum_{r=1}^R b_r \boldsymbol{\kappa}_r,$$

$$\boldsymbol{\kappa}_r(t, \mathbf{y}) = f \left( t + hc_r, \mathbf{y}_k + h \sum_{j=1}^R a_{rj} \boldsymbol{\kappa}_j \right), \quad 1 \leq r \leq R.$$

# Métodos de Runge-Kutta

Podemos generalizar os métodos de Euler para ordens mais altas. Esses são chamados de Métodos de Runge-Kutta.

$$\mathbf{y}_{k+1} = \mathbf{y}_k + h \sum_{r=1}^R b_r \boldsymbol{\kappa}_r,$$

$$\boldsymbol{\kappa}_r(t, \mathbf{y}) = f \left( t + hc_r, \mathbf{y}_k + h \sum_{j=1}^R a_{rj} \boldsymbol{\kappa}_j \right), \quad 1 \leq r \leq R.$$

$$\begin{array}{c|c} \mathbf{c} & \mathbf{A} \\ \hline & \mathbf{b} \end{array}$$

Tabela de Butcher

## Exemplos

$$\begin{array}{c|c} 0 & \\ \hline 1/2 & 1/2 \\ & 0 \quad 1 \end{array}$$

(a) RK22

$$\begin{array}{c|cc} 0 & & \\ \hline 1/2 & 1/2 & \\ 1 & -1 & 2 \\ & 1/6 & 4/6 \quad 1/6 \end{array}$$

(b) RK33

$$\begin{array}{c|ccc} 0 & & & \\ \hline 1/2 & 1/2 & & \\ 1/2 & 0 & 1/2 & \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ & 1/6 & 1/3 & 1/3 \quad 1/6 \end{array}$$

(c) RK44

# Testes com métodos gerais

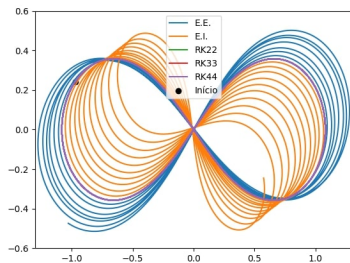


Figura: Lemniscata com  $h = 10^{-3}$

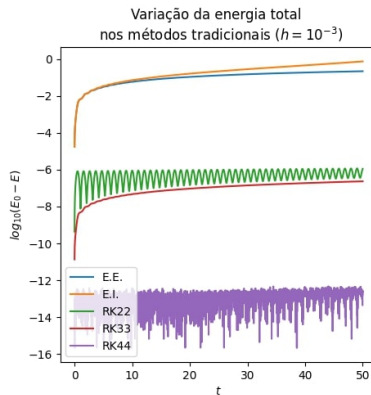


Figura: Variação da energia total na lemniscata com  $h = 10^{-3}$ .

# Integração numérica: Métodos simpléticos

## Integradores simpléticos

- Para problemas hamiltonianos autônomos existem métodos mais interessantes: os simpléticos;
- Um método simplético é aquele cuja aplicação  $\Psi_k : \mathbf{z}_k \rightarrow \mathbf{z}_{k+1}$ ,  $\mathbf{z}_k = (\mathbf{q}_k, \mathbf{p}_k)$ , é simplética, i.e.,

$$(D\Psi_h)\Omega(D\Psi_h)^T = \Omega.$$

- Um método assim preserva a estrutura simplética do sistema, conservando a função hamiltoniana e consequentemente as outras integrais primeiras.
- Mais do que isso: um integrador simplético preserva exatamente uma hamiltoniana modificada.

# Construção de métodos para hamiltonianas separáveis

Suponhamos que a hamiltoniana é separável,  $H(\mathbf{q}, \mathbf{p}) = T(\mathbf{p}) + V(\mathbf{q})$ . Consideremos os problemas:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{q}} = \nabla_{\mathbf{p}} T(\mathbf{p}), \\ \dot{\mathbf{p}} = \mathbf{0}, \end{cases}, \quad \begin{cases} \dot{\mathbf{q}} = \mathbf{0}, \\ \dot{\mathbf{p}} = -\nabla_{\mathbf{q}} V(\mathbf{q}). \end{cases}$$

# Construção de métodos para hamiltonianas separáveis

Suponhamos que a hamiltoniana é separável,  $H(\mathbf{q}, \mathbf{p}) = T(\mathbf{p}) + V(\mathbf{q})$ . Consideremos os problemas:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{q}} = \nabla_{\mathbf{p}} T(\mathbf{p}), \\ \dot{\mathbf{p}} = \mathbf{0}, \end{cases}, \quad \begin{cases} \dot{\mathbf{q}} = \mathbf{0}, \\ \dot{\mathbf{p}} = -\nabla_{\mathbf{q}} V(\mathbf{q}). \end{cases}$$

Podemos obter os respectivos fluxos explicitamente:

$$\Phi_{\tau, T}(\mathbf{z}) = \begin{bmatrix} \mathbf{q} + \tau \nabla_{\mathbf{p}} T(\mathbf{p}) \\ \mathbf{p} \end{bmatrix}, \quad \Phi_{\tau, V}(\mathbf{z}) = \begin{bmatrix} \mathbf{q} \\ \mathbf{p} - \tau \nabla_{\mathbf{q}} V(\mathbf{q}) \end{bmatrix}.$$

# Construção de métodos para hamiltonianas separáveis

Suponhamos que a hamiltoniana é separável,  $H(\mathbf{q}, \mathbf{p}) = T(\mathbf{p}) + V(\mathbf{q})$ . Consideremos os problemas:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{q}} = \nabla_{\mathbf{p}} T(\mathbf{p}), \\ \dot{\mathbf{p}} = \mathbf{0}, \end{cases}, \quad \begin{cases} \dot{\mathbf{q}} = \mathbf{0}, \\ \dot{\mathbf{p}} = -\nabla_{\mathbf{q}} V(\mathbf{q}). \end{cases}$$

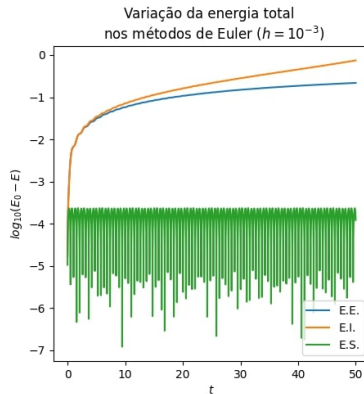
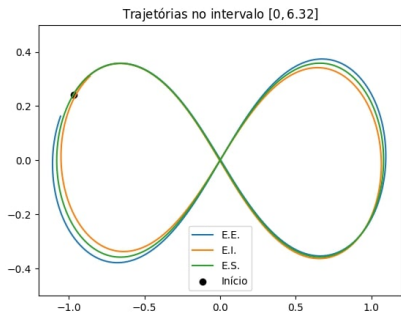
Podemos obter os respectivos fluxos explicitamente:

$$\Phi_{\tau, T}(\mathbf{z}) = \begin{bmatrix} \mathbf{q} + \tau \nabla_{\mathbf{p}} T(\mathbf{p}) \\ \mathbf{p} \end{bmatrix}, \quad \Phi_{\tau, V}(\mathbf{z}) = \begin{bmatrix} \mathbf{q} \\ \mathbf{p} - \tau \nabla_{\mathbf{q}} V(\mathbf{q}) \end{bmatrix}.$$

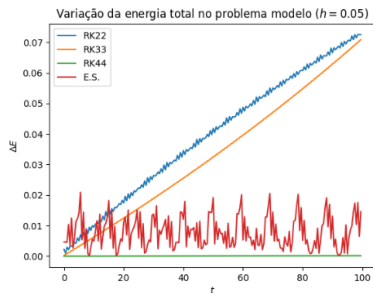
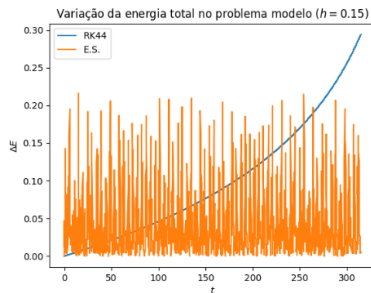
A aplicação composta  $\Phi_{\tau} = \Phi_{\tau, T} \circ \Phi_{\tau, V}$  é o chamado Método de Euler Simplético (ou semi-implícito):

$$\mathbf{q}_{k+1} = \mathbf{q}_k + h \nabla_{\mathbf{p}} T(\mathbf{p}), \quad \mathbf{p}_{k+1} = \mathbf{p}_k - h \nabla_{\mathbf{q}} V(\mathbf{q}_{k+1}).$$

# Euler explícito vs implícito vs simplético



## Euler simplético vs Runge-Kuttas

(a) Intervalo  $[0, 100]$  e  $h = 0.05$ .(b) Intervalo  $[0, 300]$  e  $h = 0.15$ .

**Figura:** Variação da energia total na simulação da lemniscata com RK22, RK33, RK44 e Euler Simplético.

# Métodos via composição

- Tomando constantes de peso  $c_1, \dots, c_s$  e  $d_1, \dots, d_s$ , a composição

$$\Phi_h = \Phi_{d_s h, V} \circ \Phi_{c_s h, T} \circ \dots \circ \Phi_{d_1 h, V} \circ \Phi_{c_1 h, T}$$

será um método simplético consistente.

- Se  $c_i = c_{s+1-i}$  e  $d_i = d_{s+1-i}$ , o método tem no mínimo ordem 2.

# Métodos via composição

- Tomando constantes de peso  $c_1, \dots, c_s$  e  $d_1, \dots, d_s$ , a composição

$$\Phi_h = \Phi_{d_s h, V} \circ \Phi_{c_s h, T} \circ \dots \circ \Phi_{d_1 h, V} \circ \Phi_{c_1 h, T}$$

será um método simplético consistente.

- Se  $c_i = c_{s+1-i}$  e  $d_i = d_{s+1-i}$ , o método tem no mínimo ordem 2.

## Velocity-Verlet

Com  $d_1 = d_2 = 1/2$  e  $c_1 = 0$  e  $c_2 = 1$ , temos um método consistente, simétrico, explícito, simplético e de 2<sup>a</sup> ordem:

$$\mathbf{q}_{k+1} = \mathbf{q}_k + h \nabla_{\mathbf{p}} T(\mathbf{p}_k) - \frac{h^2}{2} \nabla_{\mathbf{q}} V(\mathbf{q}_k),$$

$$\mathbf{p}_{k+1} = \mathbf{p}_k - \frac{h}{2} (\nabla_{\mathbf{q}} V(\mathbf{q}_k) + \nabla_{\mathbf{q}} V(\mathbf{q}_{k+1}))$$

# Métodos de Ruth

Via composição, podemos obter métodos explícitos de 3ª e 4ª ordem.

## Ruth de 3ª Ordem (RUTH, 1983)

$$\begin{array}{lll}
 c_1 = 1, & c_2 = -2/3, & c_3 = 2/3, \\
 d_1 = -1/24 & d_2 = 3/4, & d_3 = 7/24.
 \end{array}$$

## Ruth de 4ª Ordem (FOREST; RUTH, 1990)

$$\begin{array}{ll}
 c_1 = c_4 = \frac{1}{2(2 - 2^{1/3})}, & c_2 = c_3 = \frac{1 - 2^{1/3}}{2(2 - 2^{1/3})}, \\
 d_1 = d_3 = \frac{1}{2 - 2^{1/3}}, & d_2 = -\frac{2^{1/3}}{2 - 2^{1/3}}, \quad d_4 = 0.
 \end{array}$$

## Composição de métodos de 2ª ordem

Se  $\Phi_h$  é o método de Verlet, podemos obter um método de ordem (par) mais alta que é simplético, simétrico e reversível. Estes são os Störmer-Verlet Compostos (SVC):

$$\Psi_h = \Phi_{\gamma,h} \circ \dots \circ \Phi_{\gamma_2 h} \circ \Phi_{\gamma_1 h}.$$

## Composição de métodos de 2ª ordem

Se  $\Phi_h$  é o método de Verlet, podemos obter um método de ordem (par) mais alta que é simplético, simétrico e reversível. Estes são os Störmer-Verlet Compostos (SVC):

$$\Psi_h = \Phi_{\gamma,h} \circ \dots \circ \Phi_{\gamma_2 h} \circ \Phi_{\gamma_1 h}.$$

**Desvantagem:** Precisamos de muitos estágios para aumentar a ordem!

## Composição de métodos de 2ª ordem

Se  $\Phi_h$  é o método de Verlet, podemos obter um método de ordem (par) mais alta que é simplético, simétrico e reversível. Estes são os Störmer-Verlet Compostos (SVC):

$$\Psi_h = \Phi_{\gamma,h} \circ \dots \circ \Phi_{\gamma_2 h} \circ \Phi_{\gamma_1 h}.$$

**Desvantagem:** Precisamos de muitos estágios para aumentar a ordem!

### Métodos de ordem 8 e 10 (HAIRER et al., 2006)

- Métodos SVC de 8ª ordem precisam de 15 estágios;
- Métodos SVC de 10ª ordem precisam de 35 estágios.

# Há métodos de Runge-Kutta Simpléticos?

## Runge-Kutta Simplético

**Teorema:** Se os coeficientes de um método de Runge-Kutta de  $R$  estágios são tais que

$$b_i a_{ij} + b_j a_{ji} - b_i b_j = 0, \quad i, j = 1, \dots, R,$$

então o método é simplético.

# Há métodos de Runge-Kutta Simpléticos?

## Runge-Kutta Simplético

**Teorema:** Se os coeficientes de um método de Runge-Kutta de  $R$  estágios são tais que

$$b_i a_{ij} + b_j a_{ji} - b_i b_j = 0, \quad i, j = 1, \dots, R,$$

então o método é simplético.

Problema: Todo método de Runge-Kutta simplético é implícito!

# Métodos de Runge-Kutta-Nystrom (RKN)

Se  $T(\mathbf{p}) = \frac{1}{2}\mathbf{p}^T \mathbf{M}^{-1}\mathbf{p}$  e  $-\nabla_{\mathbf{q}_a} V(\mathbf{q}) = \mathbf{F}_a(\mathbf{q})$ , temos um método RKN:

$$\mathbf{y}_i = \mathbf{q}_k + c_i h \frac{\mathbf{p}_k}{m} + h^2 \sum_{j=1}^s a_{ij} \frac{\mathbf{F}(\mathbf{y}_j)}{m}, \quad i = 1, 2, \dots, s,$$

$$\mathbf{q}_{k+1} = \mathbf{q}_k + h \frac{\mathbf{p}_k}{m} + h^2 \sum_{i=1}^s b_i \frac{\mathbf{F}(\mathbf{y}_i)}{m},$$

$$\mathbf{p}_{k+1} = \mathbf{p}_k + h \sum_{i=1}^s B_i \mathbf{F}(\mathbf{y}_i),$$

para constantes  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{b}$ ,  $\mathbf{c}$  e  $B_1, \dots, B_s$ .

(OKUNBOR; SKEEL, 1994)

- RKN551: Runge-Kutta-Nystrom de 5<sup>a</sup> ordem e 5 estágios.
- RKN671: Runge-Kutta-Nystrom de 6<sup>a</sup> ordem e 7 estágios.

# Comparação dos métodos simpléticos implementados

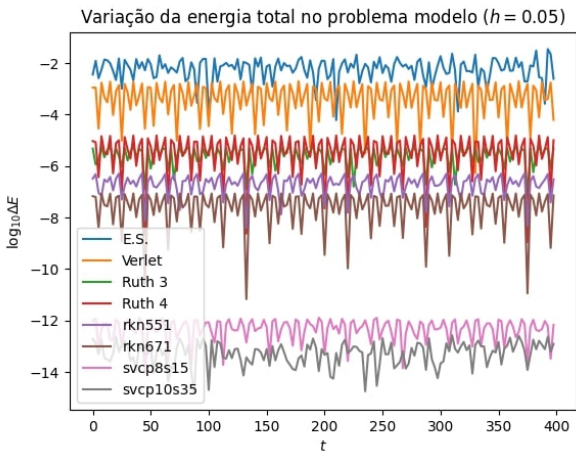


Figura: Variação da energia total para os métodos simpléticos apresentados. A lemniscata foi integrada no intervalo  $[0, 400]$  com tamanho de passo  $h = 0.05$ .

## Corretor numérico (NACOZY, 1972)

Outra forma de melhorar os resultados é aplicar correções sobre as aproximações.

# Corretor numérico (NACOZY, 1972)

Outra forma de melhorar os resultados é aplicar correções sobre as aproximações.

Considerando um PVI conservativo e  $\Psi = (\psi_1, \dots, \psi_k)$  suas  $k$  integrais primeiras, se  $z^*$  é uma aproximação de  $z = z(t^*)$ , temos por linearização

$$z = z^* + D\Psi(z^*)^T \alpha,$$

onde  $\alpha$  resolve

$$D\Psi(z^*)D\Psi(z_0)^T \alpha = \Psi(z_0) - \Psi(z^*).$$

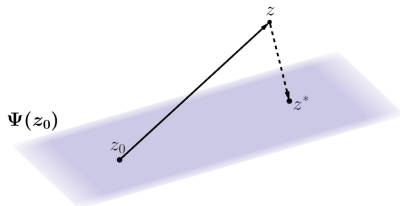


Figura: Visualização do corretor

# Corretor numérico

Vamos testar com o método de Euler explícito:

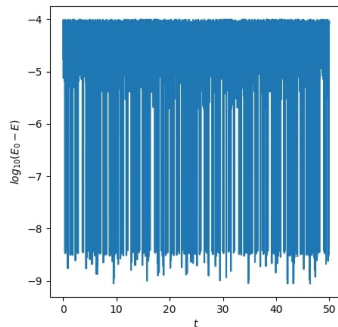
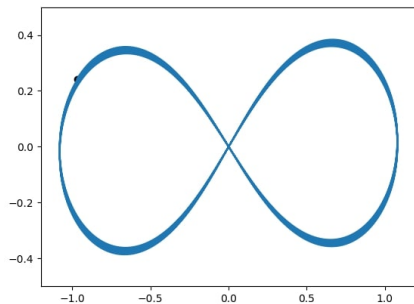
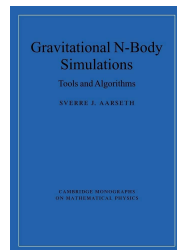
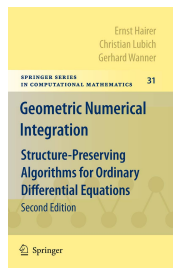


Figura: Euler explícito com correção ( $h = 10^{-3}$ ,  $\epsilon_c = 10^{-4}$ )

# Outras possibilidades...

- Outros métodos: Lobatto, variacionais, Poisson, Lie...
- Outras formas: implícitos, multipasso, tamanho de passo variável...
- Específicos: Hermite de 4<sup>a</sup> Ordem, modelos hierárquicos, *block-timestep*...
- *ad infinitum*



## Parte III: Questões numéricas do PNCG

- Como lidar com colisões?
- Gerando valores iniciais

# Colisões

Colisões (ou aproximações intensas) são um problema nesse caso!

Mas temos algumas formas de lidar com elas...

# Colisões

Colisões (ou aproximações intensas) são um problema nesse caso!

Mas temos algumas formas de lidar com elas...

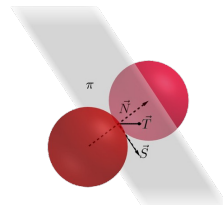
- Regularizar colisões:
  - Levi-Civita, Kustaanheimo-Stiefel, Aarseth-Zare, etc;
  - Amplamente utilizados. Mas não implementamos.

# Colisões

Colisões (ou aproximações intensas) são um problema nesse caso!

Mas temos algumas formas de lidar com elas...

- Regularizar colisões:
  - Levi-Civita, Kustaanheimo-Stiefel, Aarseth-Zare, etc;
  - Amplamente utilizados. Mas não implementamos.
- Regularizar colisões aproximadamente (e.g., colisões elásticas com base em densidade);



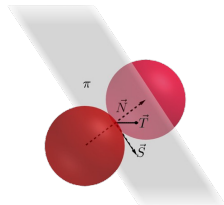
## Colisões

Colisões (ou aproximações intensas) são um problema nesse caso!

Mas temos algumas formas de lidar com elas...

- Regularizar colisões:
  - Levi-Civita, Kustaanheimo-Stiefel, Aarseth-Zare, etc;
  - Amplamente utilizados. Mas não implementamos.
- Regularizar colisões aproximadamente (e.g., colisões elásticas com base em densidade);
- Amortecer o potencial: para  $\epsilon > 0$ ,

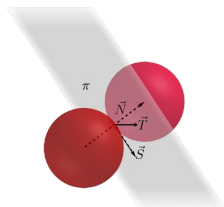
$$V = - \sum_{a < b} \frac{m_a m_b}{\sqrt{\|\mathbf{q}_b - \mathbf{q}_a\|^2 + \epsilon^2}}.$$



# Colisões: Choques elásticos

- Energia cinética conservada;
- Momento linear total conservado.

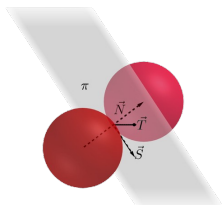
$$\begin{aligned} \mathbf{v}_1^* &= \mathbf{v}_1 + m_2 c_{12} \hat{\mathbf{N}}, \\ \mathbf{v}_2^* &= \mathbf{v}_2 - m_1 c_{12} \hat{\mathbf{N}}, \\ c_{12} &= \frac{2 \langle \mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1, \hat{\mathbf{N}} \rangle}{m_1 + m_2} \end{aligned}$$



# Colisões: Choques elásticos

- Energia cinética conservada;
- Momento linear total conservado.

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_1^* &= \mathbf{v}_1 + m_2 c_{12} \hat{\mathbf{N}}, \\ \mathbf{v}_2^* &= \mathbf{v}_2 - m_1 c_{12} \hat{\mathbf{N}}, \\ c_{12} &= \frac{2 \langle \mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1, \hat{\mathbf{N}} \rangle}{m_1 + m_2} \end{aligned}$$



Após um choque elástico entre duas partículas, o momento de dilatação recebe um acréscimo:

$$D^* = D - \frac{2m_1 m_2}{m_1 + m_2} \langle \mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1, \mathbf{q}_2 - \mathbf{q}_1 \rangle.$$

Isso pode provocar uma expansão acelerada em sistemas rápidos e com um núcleo denso!

# Colisões: Potencial amortecido

## Potencial amortecido

Dado um  $\varepsilon > 0$ , podemos definir

$$V_\varepsilon = - \sum_{a < b} \frac{m_a m_b}{\sqrt{\|\mathbf{q}_b - \mathbf{q}_a\|^2 + \varepsilon^2}}.$$

- Potencial correspondente a uma esfera de Plummer.
- Soluções suaves para todo  $t$  e qualquer condição inicial.

# Colisões: Potencial amortecido

## Potencial amortecido

Dado um  $\varepsilon > 0$ , podemos definir

$$V_\varepsilon = - \sum_{a < b} \frac{m_a m_b}{\sqrt{\|\mathbf{q}_b - \mathbf{q}_a\|^2 + \varepsilon^2}}.$$

- Potencial correspondente a uma esfera de Plummer.
- Soluções suaves para todo  $t$  e qualquer condição inicial.

- Não é mais homogêneo!
- Perdemos a similaridade dinâmica!
- A Identidade de Lagrange-Jacobi assume a forma:

$$\ddot{\mathbf{i}} = 4E - 2 \sum_{a=1}^N \langle \nabla_{\mathbf{q}_a} V(\mathbf{q}), \mathbf{q}_a \rangle.$$

## Exemplos

Problema IAU-25 via RKN671 com  $h = 10^{-3}$ .

- Potencial amortecido com  $\varepsilon = 0.1$ ;
- Choques com raio  $r = 0.05$ ;
- Choques com raio  $r = 0.1$ .

[Vídeos dos exemplos.](#)

# Valores iniciais

## Ideia

Nosso interesse era em problemas com integrais primeiras específicas:

- 1 Com distribuição uniforme, geramos um conjunto de valores iniciais;
- 2 Condicionamos os valores com base nas integrais primeiras desejadas.

# Valores iniciais

## Ideia

Nosso interesse era em problemas com integrais primeiras específicas:

- 1 Com distribuição uniforme, geramos um conjunto de valores iniciais;
- 2 Condicionamos os valores com base nas integrais primeiras desejadas.

## Método:

- 1 **Centro de massas na origem:**  $\mathbf{q}_a \mapsto \mathbf{q}_a - \mathbf{q}_{cm}(0)$ .

# Valores iniciais

## Ideia

Nosso interesse era em problemas com integrais primeiras específicas:

- 1 Com distribuição uniforme, geramos um conjunto de valores iniciais;
- 2 Condicionamos os valores com base nas integrais primeiras desejadas.

## Método:

1 **Centro de massas na origem:**  $\mathbf{q}_a \mapsto \mathbf{q}_a - \mathbf{q}_{cm}(0)$ .

2 **Momento linear total:**

$$\mathbf{p}_a \mapsto \mathbf{p}_a - \frac{c_a}{C}(\mathbf{P} - \tilde{\mathbf{P}}) \implies \mathbf{P} \mapsto \tilde{\mathbf{P}}, \quad C = \sum c_a.$$

Escolhemos  $c_a = m_a$ .

## Valores iniciais

## Ideia

Nosso interesse era em problemas com integrais primeiras específicas:

- 1 Com distribuição uniforme, geramos um conjunto de valores iniciais;
- 2 Condicionamos os valores com base nas integrais primeiras desejadas.

## Método:

- 1 Centro de massas na origem:  $q_a \mapsto q_a - q_{cm}(0)$ .
- 2 Momento linear total:

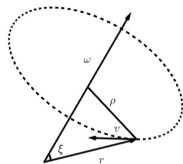
$$p_a \mapsto p_a - \frac{c_a}{C}(P - \tilde{P}) \implies P \mapsto \tilde{P}, \quad C = \sum c_a.$$

Escolhemos  $c_a = m_a$ .

- 3 Momento angular total:

$$p_a \mapsto p_a - m_a q_a \times \omega, \quad \implies J \mapsto \tilde{J}.$$

$$l_{total} \omega = J - \tilde{J}$$



## Valores iniciais

④ **Energia total:**  $E \mapsto \tilde{E} = \beta^2 T + \alpha V$

$$\mathbf{q}_a \mapsto \alpha^{-1} \mathbf{q}_a, \quad \mathbf{p}_a \mapsto \beta \mathbf{p}_a \quad \beta = \sqrt{\frac{-V_0}{T_0}}, \quad \alpha = 1 + \frac{\tilde{E}}{V_0}$$

## Valores iniciais

④ **Energia total:**  $E \mapsto \tilde{E} = \beta^2 T + \alpha V$

$$\mathbf{q}_a \mapsto \alpha^{-1} \mathbf{q}_a, \quad \mathbf{p}_a \mapsto \beta \mathbf{p}_a \quad \beta = \sqrt{\frac{-V_0}{T_0}}, \quad \alpha = 1 + \frac{\tilde{E}}{V_0}$$

- Uma aplicação afeta a outra...
- Podemos fazer iterativamente e supor convergência.
- Mas desenvolvemos uma forma direta.

## Valores iniciais

4 **Energia total:**  $E \mapsto \tilde{E} = \beta^2 T + \alpha V$

$$\mathbf{q}_a \mapsto \alpha^{-1} \mathbf{q}_a, \quad \mathbf{p}_a \mapsto \beta \mathbf{p}_a \quad \beta = \sqrt{\frac{-V_0}{T_0}}, \quad \alpha = 1 + \frac{\tilde{E}}{V_0}$$

- Uma aplicação afeta a outra...
- Podemos fazer iterativamente e supor convergência.
- Mas desenvolvemos uma forma direta.

## Método direto

$$\tilde{\mathbf{q}}_a = \frac{1}{\alpha} \left( \mathbf{q}_a - \frac{1}{M} \mathbf{q}_{cm}(0) \right),$$

$$\tilde{\mathbf{p}}_a = \beta \left( \mathbf{p}_a - \frac{m_a}{M} \left( \mathbf{P} - \beta^{-1} \tilde{\mathbf{P}} \right) - m_a \mathbf{q}_a \times \boldsymbol{\omega} \right),$$

$$\mathbf{I}_{total} \boldsymbol{\omega} = \mathbf{J} - \alpha \beta^{-1} \tilde{\mathbf{J}}$$

$$\alpha = 1 + \tilde{E}/V_0$$

$$\beta = \pm \sqrt{-\frac{V_0 + S_2}{S_1}}$$

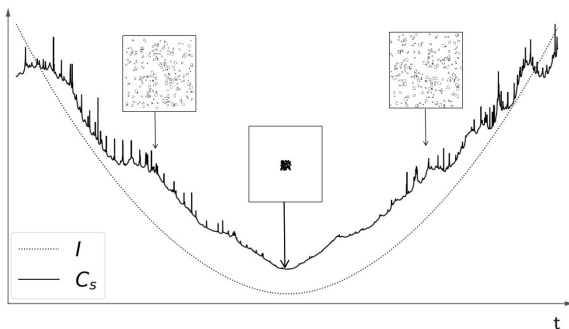
Não funciona para potencial amortecido! Mas dá para usar Newton...

# Parte IV: Setas do tempo gravitacionais

- Complexidade
- Relacionalismo e equações adimensionais
- Visualizando as setas do tempo

# Complexidade

- Se  $E \geq 0$ , então  $D$  é monótono;
- Então  $I$  tem um mínimo global e o sistema se expande para o futuro e para o passado a partir do mínimo;
- Medida de formato (Complexidade):  $C_S \propto R|V|$ .



# Princípio de Mach

É possível eliminar completamente as noções de espaço e tempo absolutos da mecânica newtoniana?

# Princípio de Mach

É possível eliminar completamente as noções de espaço e tempo absolutos da mecânica newtoniana?

Mach fez essa pergunta, e deixou ideias de o que uma mecânica desse tipo precisaria cumprir.

## Princípio de Mach (BARBOUR, 2014)

A especificação de um ponto e uma direção (**forma forte**) ou de um ponto e um vetor tangente (**forma fraca**) em um espaço de configurações reduzido determinam a evolução de forma única.

(BARBOUR; BERTOTTI, 1982) propuseram um método universal (*Best Matching*) para criar teorias que implementam o Princípio de Mach.



Figura: Ernst Mach (1838-1916)

# Redução do problema de N-corpos: Coordenadas objetivas

## Eliminação da escala em N-corpos (ALBOUY; CHENCINER, 1997)

As coordenadas  $(\sigma, \pi)$  são invariantes por translação e por escala:

$$\sigma_a = \frac{\sqrt{\mu_a}}{\sqrt{I}} \mathbf{q}_a, \quad \pi_a = \frac{\sqrt{I}}{\sqrt{\mu_a} D_0} \mathbf{p}_a - \frac{D}{D_0} \sigma_a.$$

Não são por rotação, mas tudo bem...

# Redução do problema de N-corpos: Coordenadas objetivas

## Eliminação da escala em N-corpos (ALBOUY; CHENCINER, 1997)

As coordenadas  $(\sigma, \pi)$  são invariantes por translação e por escala:

$$\sigma_a = \frac{\sqrt{\mu_a}}{\sqrt{I}} \mathbf{q}_a, \quad \pi_a = \frac{\sqrt{I}}{\sqrt{\mu_a} D_0} \mathbf{p}_a - \frac{D}{D_0} \sigma_a.$$

Não são por rotação, mas tudo bem...

## Propriedades

$$I_\sigma = \sum_{a=1}^N \|\sigma_a\|^2 = 1,$$

$$\sigma_{cm} = \sum_{a=1}^N \sqrt{\mu_a} \sigma_a = \mathbf{0},$$

$$\{f(D, \sqrt{I}), \pi_a\} = 0,$$

$$D_{\sigma, \pi} = \sum_{a=1}^N \pi_a \cdot \sigma_a = 0,$$

$$\pi_\sigma = \sum_{a=1}^N \sqrt{\mu_a} \pi_a = \mathbf{0},$$

$$\{f(D, \sqrt{I}), \sigma_a\} = 0.$$

# Redução do problema de N-corpos: Evolução

## Eliminando o tempo

O momento de dilatação  $D$  comuta com  $\log \sqrt{I}$ . Se  $E = 0$  e sendo  $K_S = \|\pi\|^2$ :

$$\mathcal{H} = \log(K_S + \zeta^2) - \log C_S,$$

e temos:

$$\frac{d\sigma_a}{d\zeta} = \frac{2\pi_a}{K_S + \zeta^2}, \quad \frac{d\pi_a}{d\zeta} = \frac{\partial \log C_S}{\partial \sigma_a} - \frac{K_S}{K_S + \zeta^2} \sigma_a.$$

Um sistema não autônomo...

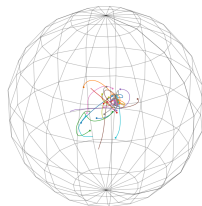


Figura: Problema de 20 corpos.

# Redução do problema de N-corpos: A escala como fricção

Através de uma transformação não-canônica

$$\lambda = \log \zeta, \quad \omega_a = \pi_a / \zeta,$$

obtemos uma hamiltoniana autônoma, mas *dissipativa*:

$$H_0 = \log \left( \|\omega\|^2 + 1 \right) - \log C_S.$$

As equações de movimento ficam:

$$\frac{d\sigma_a}{d\lambda} = \frac{\partial H_0}{\partial \omega_a}, \quad \frac{d\omega_a}{d\lambda} = -\frac{\partial H_0}{\partial \sigma_a} - \omega_a.$$

- A escala atua como uma fricção no espaço de pré-formas.

# Redução do problema de N-corpos: A escala como fricção

Através de uma transformação não-canônica

$$\lambda = \log \zeta, \quad \omega_a = \pi_a / \zeta,$$

obtemos uma hamiltoniana autônoma, mas *dissipativa*:

$$H_0 = \log \left( \|\omega\|^2 + 1 \right) - \log C_S.$$

As equações de movimento ficam:

$$\frac{d\sigma_a}{d\lambda} = \frac{\partial H_0}{\partial \omega_a}, \quad \frac{d\omega_a}{d\lambda} = -\frac{\partial H_0}{\partial \sigma_a} - \omega_a.$$

- A escala atua como uma fricção no espaço de pré-formas.
- A complexidade  $C_S$  deve crescer indefinidamente.

## Redução do problema de N-corpos: A escala como fricção

Através de uma transformação não-canônica

$$\lambda = \log \zeta, \quad \omega_a = \pi_a / \zeta,$$

obtemos uma hamiltoniana autônoma, mas *dissipativa*:

$$H_0 = \log \left( \|\omega\|^2 + 1 \right) - \log C_S.$$

As equações de movimento ficam:

$$\frac{d\sigma_a}{d\lambda} = \frac{\partial H_0}{\partial \omega_a}, \quad \frac{d\omega_a}{d\lambda} = -\frac{\partial H_0}{\partial \sigma_a} - \omega_a.$$

- A escala atua como uma fricção no espaço de pré-formas.
- A complexidade  $C_S$  deve crescer indefinidamente.
- A dinâmica para  $H_0$  tem início, então  $C_S$  tem um mínimo.

# Redução do problema de N-corpos: A escala como fricção

Através de uma transformação não-canônica

$$\lambda = \log \zeta, \quad \omega_a = \pi_a / \zeta,$$

obtemos uma hamiltoniana autônoma, mas *dissipativa*:

$$H_0 = \log \left( \|\omega\|^2 + 1 \right) - \log C_S.$$

As equações de movimento ficam:

$$\frac{d\sigma_a}{d\lambda} = \frac{\partial H_0}{\partial \omega_a}, \quad \frac{d\omega_a}{d\lambda} = -\frac{\partial H_0}{\partial \sigma_a} - \omega_a.$$

- A escala atua como uma fricção no espaço de pré-formas.
- A complexidade  $C_S$  deve crescer indefinidamente.
- A dinâmica para  $H_0$  tem início, então  $C_S$  tem um mínimo.
- Então,  $C_S$  caracteriza uma seta do tempo para o problema!

# Energia positiva?

Se  $E > 0$ , temos outra hamiltoniana:

$$\mathcal{H} = \log \left( C_S + \sqrt{C_S^2 + \frac{1}{2}ED_0^2(K_S + \zeta^2)} \right).$$

- O princípio de Mach-Poincaré já não vale aqui, mas ainda temos uma teoria invariante por escala e dimensional.
- Quando  $\zeta \rightarrow \infty$ ,  $C_S$  se enfraquece e o sistema assintoticamente congela no espaço de formas.

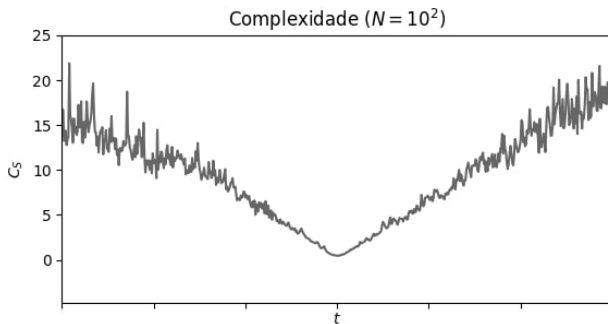
# Dinâmica de Formas

Voltando à Dinâmica de Formas, podemos observar o comportamento da complexidade para diferentes valores de  $E$ .

- $N = 100$  e  $E = 0$  (p.b. A.6);
- $N = 10^3$  e  $E = -0.25$  (p.b. A.7);
- $N = 10^3$  e  $E = 0$  (p.b. A.8);
- $N = 10^3$ ,  $E = 0.25$  e  $m_a = 10^{-3}$  (p.b. A.9);
- $N = 10^3$ ,  $E = 0.25$  e  $m_a > 1$  (p.b. A.10);

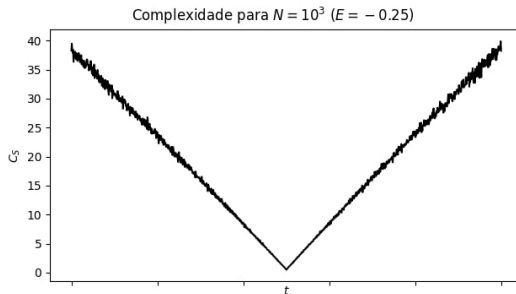
# Dinâmica de Formas: $N = 100$ e $E = 0$ (p.b. A.6)

- Vídeos
- Complexidade:

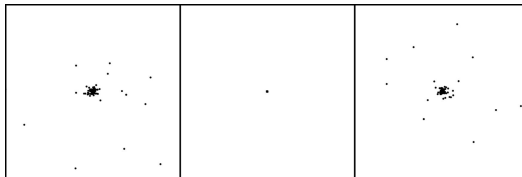


# Dinâmica de Formas: $N = 10^3$ e $E = -0.25$ (p.b. A.7)

- Vídeos
- Complexidade:

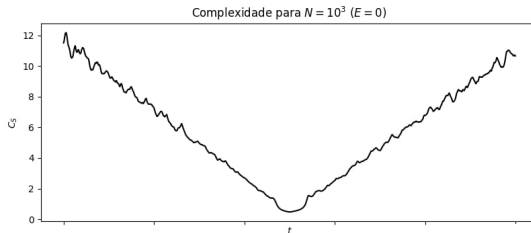


- Espalhamento:

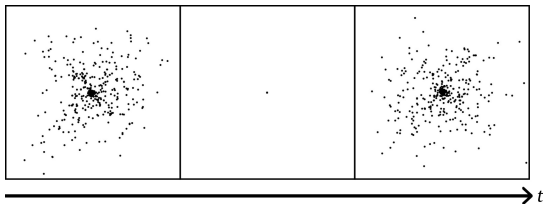


# Dinâmica de Formas: $N = 10^3$ e $E = 0$ (p.b. A.8)

- Vídeos
- Complexidade:

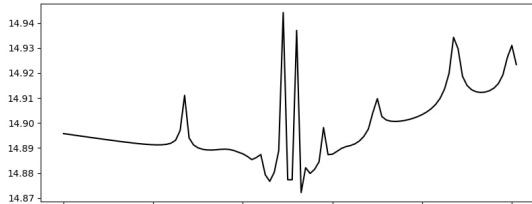


- Espalhamento:

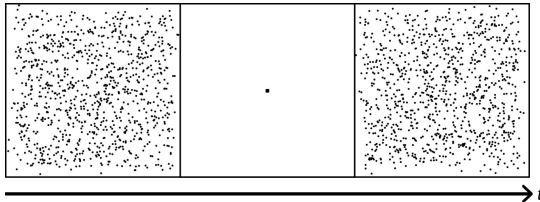


# Dinâmica de Formas: $N = 10^3$ , $E = 0.25$ e $m_a = 10^{-3}$ (p.b. A.9)

- Vídeos
- Complexidade:

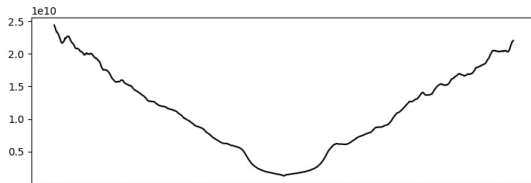


- Espalhamento:

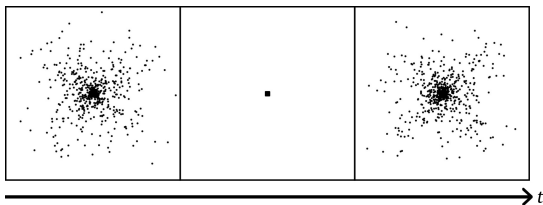


# Dinâmica de Formas: $N = 10^3$ , $E = 0.25$ e $m_a > 1$ (p.b. A.10)





- Vídeos
- Complexidade:



- Espalhamento:



## Referências I

-  AARSETH, Sverre J. *Gravitational N-Body Simulations: Tools and Algorithms*. Cambridge: Cambridge University Press, 2003. (Cambridge Monographs on Mathematical Physics). ISBN 978-0-521-43272-6. DOI: [10.1017/CB09780511535246](https://doi.org/10.1017/CB09780511535246).
-  ALBOUY, Alain; CHENCINER, Alain. Le problème des n corps et les distances mutuelles. *Inventiones Mathematicae*, Springer Science e Business Media LLC, v. 131, n. 1, p. 151–184, dez. 1997. ISSN 1432-1297. DOI: [10.1007/s002220050200](https://doi.org/10.1007/s002220050200). Disponível em: <http://dx.doi.org/10.1007/s002220050200>.
-  BARBOUR, Julian. Kepler and Mach's Principle. In: *GENERAL Relativity, Cosmology and Astrophysics*. [S.l.]: Springer International Publishing, 2014. P. 3–32. ISBN 9783319063492. DOI: [10.1007/978-3-319-06349-2\\_1](https://doi.org/10.1007/978-3-319-06349-2_1). Disponível em: [http://dx.doi.org/10.1007/978-3-319-06349-2\\_1](http://dx.doi.org/10.1007/978-3-319-06349-2_1).
-  BARBOUR, Julian; BERTOTTI, Bruno. Mach's Principle and the Structure of Dynamical Theories. *Proceedings of the Royal Society of London. A. Mathematical and Physical Sciences*, The Royal Society, v. 382, n. 1783, p. 295–306, ago. 1982. ISSN 0080-4630. DOI: [10.1098/rspa.1982.0102](https://doi.org/10.1098/rspa.1982.0102). Disponível em: <http://dx.doi.org/10.1098/rspa.1982.0102>.

## Referências II



BARBOUR, Julian; LOSTAGLIO, Matteo; MERCATI, Flavio. Scale anomaly as the origin of time. *General Relativity and Gravitation*, Springer Science e Business Media LLC, v. 45, n. 5, p. 911–938, abr. 2013. ISSN 1572-9532. DOI: 10.1007/s10714-013-1516-y. Disponível em: <http://dx.doi.org/10.1007/s10714-013-1516-y>.



FOREST, Etienne; RUTH, Ronald D. Fourth-order symplectic integration. *Physica D: Nonlinear Phenomena*, v. 43, n. 1, p. 105–117, 1990. ISSN 0167-2789. DOI: [https://doi.org/10.1016/0167-2789\(90\)90019-L](https://doi.org/10.1016/0167-2789(90)90019-L). Disponível em: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/016727899090019L>.



HAIRER, Ernst; LUBICH, Christian; WANNER, Gerhard. *Geometric numerical integration*. 2. ed. Berlin, Germany: Springer, fev. 2006. (Springer Series in Computational Mathematics).



MARCHAL, Christian; SAARI, Donald G. On the final evolution of the n-body problem. *Journal of Differential Equations*, Elsevier BV, v. 20, n. 1, p. 150–186, jan. 1976. ISSN 0022-0396. DOI: 10.1016/0022-0396(76)90101-7. Disponível em: [http://dx.doi.org/10.1016/0022-0396\(76\)90101-7](http://dx.doi.org/10.1016/0022-0396(76)90101-7).

## Referências III



NACOZY, Paul E. The Use of Integrals in Numerical Integrations of the N-Body Problem. In: GRAVITATIONAL N-Body Problem. [S.l.]: Springer Netherlands, 1972. P. 153–164. ISBN 9789401028707. DOI: 10.1007/978-94-010-2870-7\_18. Disponível em: [http://dx.doi.org/10.1007/978-94-010-2870-7\\_18](http://dx.doi.org/10.1007/978-94-010-2870-7_18).



OKUNBOR, Daniel I.; SKEEL, Robert D. Canonical Runge—Kutta—Nystrom methods of orders five and six. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, Elsevier BV, v. 51, n. 3, p. 375–382, jun. 1994. ISSN 0377-0427. DOI: 10.1016/0377-0427(92)00119-t. Disponível em: [http://dx.doi.org/10.1016/0377-0427\(92\)00119-T](http://dx.doi.org/10.1016/0377-0427(92)00119-T).



RUTH, Ronald. Canonical integration technique. *IEEE Transactions on Nuclear Science*, NS-30, p. 2669–2671, ago. 1983.



SHAMPINE, L.F. Conservation laws and the numerical solution of ODEs. *Computers and Mathematics with Applications*, v. 12, 5, Part 2, p. 1287–1296, 1986.